البرهان على مفارقة باناخ-تارسكي

خالد الشهري

مقدمة:-

سنة 1924 نشر ألفريد تاركسي و ستيفن باناخ ورقة[١] لبرهنة أنه يمكن إنتاج كرتين متطابقتين من تقسيم كرة إلى عدد منتهٍ من الأجزاء ثم إعادة ترتيبها.

يعتمد البرهان على مسلمة الإختيار التي تنص على أنه لأي مجموعة C تحتوي على مجموعات غير خالية فإنه يمكن إختيار عنصر من كل مجموعة في C.

أي أنه إذا كان S مجموعة في C يمكن أن توجد دالة f معرفة على C بحيث f(S) عنصر في S.

يمكن وصف مسلمة الإختيار صوريا كالتالي:

لأي مجموعتين A,B وعلاقة ثنائية $P \subseteq A \times B$

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y) \Rightarrow (\exists f : A \to B)(\forall x \in A)P(x, f(x)).$$

البرهان:-

١-تجزيء الزمر الحرة:-

تعريف.١:يقال لأي زمرة أنها زمرة حرة إذا كانت أي كلمتين في الزمرة مختلفة إلا إذا كان تساويها نتيجة لمسلمات الزمرة .

لتكن الزمرة F_2 ومولداتها a,b فإن الزمرة F_2 مكونة من كل العبارات المركبة الممكنة من a,b,a^-1,b^-1 والعنصر المحايد e.

لتكن S(a) هي كل العبارات في F_2 التي تبدأ بـa وبالمثل S(b),S(a^-1),S(b^-1).

ولتكن كل العبارات مبسطة أي أن العبارة (a)(a^-1)(b) هي نفسها b.

واضح أنه يمكن تقسيم الزمرة إلى خمسة أجزاء :

$$F_2 = \{e\} \cup S(a) \cup S(b) \cup S(a^{-1}) \cup S(b^{-1})$$

لتكن xS(y) هي كل الكلمات الناتجة من وضع x بداية كل الكلمات التي تبدأ بـy

---

[١] Banach, Stefan; Tarski, Alfred (١٩٢٤) Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes

وبحسب هذا يمكن كتابة F_2 بطريقتين:

$$\mathrm{F}_2 = S(a) \cup aS(a^{-1})$$

وأيضا

$$\mathrm{F}_2 = S(b) \cup bS(b^{-1})$$

هذا واضح لأن الكلمات في(S(a^-1 هي كل الكلمات الممكنة التي لاتبدأ بa ووضع في أولها a^-1 فبعد وضع a في أولها فإنه بحسب مسلمات الزمرة يتم تبسيطها فالناتج يكون كل الكلمات التي تبدأ بb,a^-1,b^-1 فمثلا الكلمة (a^-1)(b)(a)(b) هي كلمة في S(a^-1) ولكن aS(a^-1) وهي(a)(a^-1)(b)(a)(b) هي نفسها bab فتنتمي إلى S(b) وهكذا على الباقي.

فقمنا بتقسيم الزمرة F_2 إلى خمسة أجزاء قم قمنا بإعادة ترتيبها بالعملية xS(y) لإنتاج زمرتين متساويتين وبنفس الطريقة سنقسم الكرة.

٢-زمرة الدوران:-

لنقسم الكرة نحتاج لإيجاد طريقة لتعيين كل نقطة على سطح الكرة.

سنقوم بتدوير النقطة (0,1,0) في $\mathbb{R}^3$ بعدة خطوات وكل خطوة ستعرف نقطة مختلفة على سطح كرة الوحدة .

سنعرف زمرة الدوران G ومولداتها هي A وB بحيث A هي دوران حول المحور x بزاوية θ وB حول محور z بحيث:

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{3})$$

إذن يمكن أن تكون العبارات في الزمرة G عبارة عن مضروب مصفوفات الدوران التالية:

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بمعنى آخر فإن الكلمة ABA هي تدوير لنقطة حول محور x بزاوية θ ثم على محور z لنفس الزاوية ثم على محور x بنفس الزاوية مرة أخرى.

مقدمة.١ :لأي كلمة p في G بطول n فإن:

$$\boldsymbol{p\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \\ c\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

بحيث a,b,c أعداد صحيحة.

أولا نقصد بطول n هي عدد العناصر أو الدوران في الكلمة مثلا الكلمة ABA طولها ٣.

نثبت القضية بالإستقراء، واضح أن القضية صحيحة عند n=0 لأن النقطة (0,1,0)ستبقى نفسها بلا أي دوران.

لنفرض أن القضية صحيحة عند n إذن

$$p\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \\ c\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

فهناك ٤ إحتمالات لكلمة بطول n+1

$$Ap\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^{n+1}}\begin{bmatrix} 3a\sqrt{2} \\ b - 4c \\ (2b + c)\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}p\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^{n+1}}\begin{bmatrix} 3a\sqrt{2} \\ b + 4c \\ (-2b + c)\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$Bp\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3^{n+1}}\begin{bmatrix}(a-2b)\sqrt{2}\\4a+b\\3c\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}p\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3^{n+1}}\begin{bmatrix}(a+2b)\sqrt{2}\\-4a+b\\3c\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

فلأن a,b,c أعداد صحيحة فثبت المطلوب.

مقدمة.٢ : b في مقدمة.١ لايقبل القسمة على ٣ أبدا.

سنثبتها أيضا بالإستقراء.لنفرض أولا أن b_n, a_n, c_n, p_n هي الكلمة *p* والأعداد b, a, c عند طول *n*.

سنحتاج لإثبات المقدمة لثلاثة قضايا.

القضية x: b_n لايقبل القسمة على ٣ وأحد العددين a_n, c_n لا يقبلان القسمة على ٣ لو كان c_n فالحرف الأخير إما A^{-1} أو A ولو كان a_n لايقبل القسمة على ثلاثة فالأخير إما B^{-1} أو B .لنسمي هذه القضية بالقضية x.

القضية الأولى:لنفرض أن b_0 لايقبل القسمة على ٣ لكن a_0, c_0 يقبلان إذن بحسب الإحتمالات الأربعة أعلاه فالقضية x صحيحة عند *n=1*.

القضية الثانية: لو كان b_1 لايقبل القسمة على ٣ وأحد العددين a_1, c_1 لايقبل القسمة على ٣ لكن a_0, c_0 يقبلان القسمة على ٣ و b_0 لايقبل.

لنفرض أنه c_1 هذا يعني أن آخر حرف إما A^{-1} أو A:

١:لو كان *A* إذن حسب الإحتمالين الأخيرين في ***مقدمة.١*** b_2 و a_2 لايقبل القسمة على ٣ لكن c_2 يقبل.أما الإحتمال الثاني مرفوض.وعلى الإحتمال الأول:

$$AAp_0\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{bmatrix}9a\sqrt{2}\\-7b-8c\\(4b-7c)\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

إذن b_2 و c_2 لايقبلان القسمة على ٣ لكن a_2 يقبل.

٢: لو كان A^{-1} فنثبتها بنفس الطريقة ،إذن b_2 و c_2 لايقبلان القسمة على ٣ لكن a_2 يقبل.

وبنفس الطريقة إذا فرضنا أن a_1 هو الذي لايقبل القسمة على ٣ فنثبت أن b_2 و a_2 لايقبلان القسمة على ثلاثة و c_2 يقبل إذن القضية x صحيحة عن *n=2*.

القضية الثالثة:لنفرض أن القضية x صحيحة عند *n-1* وعند *n* ولنفرض أن c_n هو الذي لايقبل القسمة على ٣ هذا يعني أن آخر حرف إما A^{-1} أو A:

١: لو كان *A* إذن حسب الإحتمالين الأخيرين في ***مقدمة.١*** b_n و a_n لايقبل القسمة على ٣ لكن c_n يقبل.أما الإحتمال الثاني مرفوض.وعلى الإحتمال الأول:

$$AAp_{n-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3^{n+1}}\begin{bmatrix}9a_{n-1}\sqrt{2}\\-7b_{n-1}-8c_{n-1}\\(4b_{n-1}-7c_{n-1})\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

لكن:

$$Ap_{n-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3^{n}}\begin{bmatrix}3a_{n-1}\sqrt{2}\\b_{n-1}-4c_{n-1}\\(2b_{n-1}+c_{n-1})\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

ولأن القضية x صحيحة عند *n-1* $b_{n-1}-4c_{n-1}$ لايقبل القسمة على ٣ هذا يعني أن باقي قسمة b_{n-1} على ٣ لايساوي باقي قسمة c_{n-1} على ٣ وعليه $-7b_{n-1}-8c_{n-1}$ أيضا لايقبل القسمة على ٣ وأيضا $4b_{n-1}-7c_{n-1}$ لايقبل القسمة على ٣ (تفصيل أكثر في الملحق.أ)إذن b_{n+1} لايقبل القسمة على ٣ و c_{n+1} لايقبل القسمة على ٣ لكن a_{n+1} يقبل.

٢: لو كان A^{-1} فنثبتها بنفس الطريقة ،إذن b_{n+1} وc_{n+1} لايقبلان القسمة على ٣ لكن a_{n+1} يقبل.

وبنفس الطريقة إذا فرضنا أن a_n هو الذي لايقبل القسمة على ٣ فنثبت أن b_{n+1} وa_{n+1} لايقبلان القسمة على ثلاثة و c_n يقبل إذن القضية x صحيحة عند *n+1*.

إذن حسب القضية الأولى والقضية الثانية ،القضية x صحيحة عند *n=2* و*n=1* فالقضية x صحيحة عند أي عدد صحيح *n* أكبرمن أو يساوي ١.

لما ثبت ذلك ثبت أن b لايقبل القسمة عند أي كلمة في الزمرة *G*.

مبرهنة.١ :الزمرة G زمرة حرة.

المقصود بأن أي كلمة أو أي مجموعة تدوير لنقطة (0,1,0) ستؤدي لنقاط مختلفة دائما ولايمكن أن ترجع لنفس النقطة.

لنفرض أنها رجعت هذا يعني أنه توجد كلمة p مبسطة طولها أكبر من ٠ بحيث:

$$p\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

لكن ثبت في ***مقدمة.١*** أن: $\mathrm{p}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3^{\mathrm{n}}}\begin{bmatrix}\mathrm{a}\sqrt{2}\\\mathrm{b}\\\mathrm{c}\sqrt{2}\end{bmatrix}$

إذن:

$$\frac{1}{3^{\mathrm{n}}}\begin{bmatrix}\mathrm{a}\sqrt{2}\\\mathrm{b}\\\mathrm{c}\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a}{3^{\mathrm{n}}}\sqrt{2}\\\frac{b}{3^{\mathrm{n}}}\\\frac{c}{3^{\mathrm{n}}}\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\rightarrow b=3^{\mathrm{n}}$$

أي أن b يقبل القسمة على ٣ ،لكن ثبت في ***مقدمة.٢*** أن b لايقبل القسمة على ٣ أبدا هذا خلف.فثبت أن G زمرة حرة.

٣-تجزيء الكرة:-

لتكن L مجموعة كل نقاط الكرة على سطح كرة الوحدة وداخلها ولتكن 'L نفس المجموعة L بإستثناء مركز الكرة.

تعريف٢ .نقول أن النقطتين a و b في نفس المدار إذا وجدت كلمة p في G بحيث . p(a)=b

أي أنه إذا أمكن تدوير النقطة a بعدد من الخطوات ثم وصلت إلى النقطة b فنقول أن النقطتين في نفس المدار.

واضح أنه توجد عدة مدارات في 'L بل لأن سطح الكرة متصل أي أن مجموعة النقاط على سطح الكرة غير قابلة للعد ومجموعة النقاط في المدار الواحد قابلة للعد فإنه لانهاية للمدارات.لهذا فإن مسلمة الإختيار أساسية في هذه المسألة فبحسب مسلمة الإختيار يمكن إختيار نقطة واحدة من كل مدار ولنسمي مجموعة هذه النقاط M .

الآن لأننا نريد تعيين كل نقطة على الكرة بكلمة واحدة فقط من G يجب علينا إستثناء النقاط الواقعة على محاور الدوران.

لأي كلمة k في G توجد نقطتين x,y بحيث k(x)=x و k(y)=y مثلا لنفرض نقطة m في M بحيث $p(m) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ و Ap كلمة مختلفة لكن $Ap(m) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ أيضا فتوجد كلمتين p و Ap توصل لنفس النقطة لأن النقطة *(1,0,0)* على محور دوران الكلمة *A*.مثال آخر لمحور كلمة دوران ،نريد إيجاد نقطة على محور دوران كلمة من أكثر من حرف مثل *AB* :

$$AB\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\sqrt{2}\\0 & 2\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} * \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\sqrt{2} & 0\\2\sqrt{2} & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

ينتج:

$$\begin{bmatrix}\frac{-2y\sqrt{2}+x}{3}\\ \frac{2x\sqrt{2}}{9} - \frac{6z\sqrt{2}}{9} + \frac{y}{9}\\ \frac{2y\sqrt{2}}{9} + \frac{3z}{9} + \frac{8x}{9}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

إذن:

$$x = z, y = -\frac{z\sqrt{2}}{2}$$

لكن لأن النقطة*(x,y,z)* على سطح الكرة أي أن $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

نجد أنه توجد نقطتين تحققان المطلوب: $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{10}}{5}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{10}}{5}\end{bmatrix}$ أي أن هذين النقطتين على محور دوران الكلمة *AB* فبتالي ستبقى ثابتة تحت هذا التدوير.نسمي هذه النقاط الواقعة على محاور الدوران بالنقاط الثابتة،ولأن معادلة الكرة تعطي حلين فلكل كلمة في *G* له نقطتين ثابتتين على محور دورانه لنسمي مجموعة النقاط الثابتة *D*.ولأن الزمرة *G* قابلة للعد و كل كلمة لها نقطتين فالمجموعة *D* قابلة للعد.لنستثني مجموعة النقاط*D* من *L'* ونرمز لنتيجة بـ *L'\D*.

لنفرض المجموعة X تحتوي على مجموعة النقاط التي تنتج من تدوير النقاط في المجموعة M بـA^{-1} فقط مكررة بأي عدد من المرات

مثلا $A^{-1}M, A^{-1}A^{-1}M, A^{-1}A^{-1}A^{-1}M ....$

إذن يمكن تقسيم المجموعة$L'\backslash D$ إلى ٤ أجزاء مثل تقسيم الزمرة F_2 بداية القسم الأول:

$$P_1 = S(A)M \cup M \cup X$$

$$P_2 = S(A^{-1})M \backslash X$$

$$P_3 = S(B)M$$

$$P_4 = S(B^{-1})M$$

واضح أن:

$$L' \backslash D = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$$

لكن:

$$AP_2 = P_2 \cup P_3 \cup P_4$$

أي أن بتدوير المجموعة P_2 بـA ستحصل على المجموعات P_2, P_3, P_4 .

إذن:

$$L' \backslash D = P_1 \cup AP_2$$

أيضا:

$$BP_4 = P_1 \cup P_2 \cup P_4$$

فنجد:

$$L' \backslash D = P_3 \cup BP_4$$

إذن بتقسيم المجموعة L'\D (والتي هي الكرة من غير النقاط الثابتة والمركز) إلى أربع أجزاء ثم فصل أول جزئين في مجموعة والجزئين الآخرين بمجموعة أخرى ثم تدوير جزء من كل مجموعة ينتج لنا مجموعتين كل واحدة هي نفس L'\D.

قمنا بإنشاء المجموعة X من أجل تفادي تكرار المجموعة M أكثر من مرة لأنه لو فرضنا أن X غير موجودة فالمجموعة P_1 ستحتوي على M والمجموعة AP_2 ستحتوي على M لأن المجموعة $A^{-1}M$ ستكون في P_2.

٤-النقاط الثابتة والمركز:-

تعريف.٣:نقول أن أي مجموعتين X و Y متساويتين بالتحليل إذا أمكن تجزيء X إلى عدد منته من الأجزاء ثم تجميعه بتحريك أو تدوير الأجزاء إلى Y.

مثلا أي خط x إذا تم تقسيمه إلى جزئين ثم تدوير أحد الجزئين ليكون عمودي على الجزء الآخر مع الحفاظ على الطول نسميه y فمجموعة النقاط في x متساوية بالتحليل مع الخط المكسور y.وأيضا كما ثبت في القسم السابق المجموعة $L' \setminus D$ متساوية بالتحليل مع مجموعتين كل واحدة تساوي $L' \setminus D$.

مبرهنة.٢: L'\D متساوية بالتحليل مع L'.

لأن المجموعة D قابلة للعد وكل نقطة فيه تصل بخط مار بالمركز بنقطة أخرى في D هذه الخطوط هي محاور الدوران فيمكن إيجاد نقطة m في L' ليست في D بحيث الخط المار بـm ومركز الكرة لايصل أي نقطة في D وإلا كانت m في D وليكن هذا الخطl محور دوران.ولأن المجموعة D معدودة فيمكن إيجاد زاوية دوران θ بحيث دوران المجموعة D حولl بزاوية θ لا يصل لأي نقطة أخرى في D.بمعنى آخر يوجد دوران k لنقاط في المجموعة D حول المحور l بزاوية θ بحيث $k^n D \neq k^m D$ لأي عددين صحيحين مختلفين n وm (تفصيل أكثر في ملحق.ب).لتكن مجموعةE بحيث:

$$E = D \cup k^1(D) \cup k^2(D) \cup k^3(D) \cup k^4(D) \cup \dots$$

إذن:

$$k(E) = k^1(D) \cup k^2(D) \cup k^3(D) \cup k^4(D) \cup k^5(D) \cup \dots$$

واضح أن:$(L' \setminus E) \cup E = L'$ لكن $(L' \setminus E) \cup E$ متساوي بالتحليل مع:

$$(L' \setminus E) \cup k(E) = (L' \setminus E) \cup (E \setminus D) = (L' \setminus D)$$

وهو المطلوب.

إذن لما ثبت أن $L' \setminus D$ متساوية بالتحليل مع نسختين منها وأن المجموعة $L' \setminus D$ متساوية بالتحليل مع L' فثبت أن الكرة بدون المركز متساوية بالتحليل مع كرتين بلا مركز وبنفس القطر.الآن نريد أن نتعامل مع المركز.

مقدمة.٣:أي دائرة متساوية بالتحليل مع نفس الدائرة بإستثناء نقطة منها.

لنفرض دائرة الوحدة.ولنفرض أن النقطة المستثناة هي (1,0) ولتكن A مجموعة النقاط الناتجة عن تدوير النقطة (1,0) بزاوية ١ راديان n من المرات.لتكن S مجموعة النقاط على دائرة الوحدة ولتكن المجموعة B هي النقاط التي في {(1.0)}\S وليست في A.

لأن π عدد غير نسبي لايمكن تدوير (1,0) بـ1 راديان n من المرات وتعود لنفس النقطة وإلا: $n(1) = 2k\pi \to \pi = \frac{n}{2k}$. إذن بتدوير المجموعة A بزاوية -١ راديان لنسمي المجموعة الناتجة A' تصبح النقطة ((cos(1),sin(1)) في (1,0) وهي النقطة المستثناة ولأن عدد النقاط الباقية في A لانهاية لها وهي معدودة وبين نقطة وأخرى ١ راديان ستكون كل النقاط في A أيضا في A'.إذن:

$$A' = A \cup \{1,0\}, S\backslash\{1,0\} = A \cup B \to S = A' \cup B$$

إذن S و $S\backslash\{1,0\}$ متساويتين بالتحليل وهو المطلوب.

مبرهنة.٣ :كرة بدون مركز متساوية بالتحليل مع كرة مع مركز.

إفرض أن المركز جزء من دائرة داخل الكرة إذن بحسب ***مقدمة.٣*** تلك الدائرة متساوية بالتحليل مع دائرة كاملة.إذن L' متساوية بالتحليل مع L.

بعدما أنهينا كل المقدمات اللازمة نأتي الآن لهدف هذا المقال.

مبرهنة.٤ (مبرهنة باناخ-تارسكي):أي كرة متساوية بالتحليل مع نسختين من نفسها.

ثبت في القسم الثالث أن $L' \setminus D$ وهي الكرة بدون النقاط الثابتة والمركز متساوية بالتحليل مع كرتين تساويها من غير النقاط الثابتة والمركز.ثم ثبت في ال***مبرهنة.٢*** أن أي كرة بدون النقاط الثابتة والمركز متساوية بالتحليل مع كرة مع النقاط الثابتة وبدون مركز.ثم ثبت في الـ***مبرهنة.٣*** أن أي كرة بدون مركز متساوية بالتحليل مع كرة كاملة تساويها.فثبت أن أي كرة متساوية بالتحليل مع نسختين من نفسها.

تم البرهان.

يمكن تعميم المبرهنة لأي أشكال أخرى في $\mathbb{R}^3$ ومن جهة أخرى أثبت باناخ وتارسكي أن مثل هذه المبرهنة محال في البعد الثاني والأول أي في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^1$.



[1] AVERY ROBINSON. THE BANACH-TARSKI PARADOX.

--

[2] Anders Kaseorg. The Banach-Tarski Paradox.

--

[3] Raphael M.Robinson. On the decomposition of spheres.

--

[4] Alfonso Gracia-Saz. THE BANACH-TARSKI THEOREM.

--

[5] Stan Wagon. The Banach-Tarski paradox, Cambridge University Press, Cambridge.

ملحق.أ:-

لنفرض أن $b_{n-1} - 4c_{n-1}$ لايقبل القسمة على ٣ هذا ولتكن r_1, r_2 باقي قسمة c_{n-1} و b_{n-1} على ٣ وهي أعداد موجبة صحيحة وk,n أعداد صحيحة بحيث:

$$\frac{b_{n-1} - 4c_{n-1}}{3} = \frac{b_{n-1}}{3} - 4\left(\frac{c_{n-1}}{3}\right) = k + \frac{r_1}{3} - 4(n + \frac{r_2}{3})$$

إذن:

$$k + \frac{r_1}{3} - 4\left(n + \frac{r_2}{3}\right) = k + \frac{r_1}{3} - 4n - \frac{4}{3}(r_2) = k + \frac{r_1}{3} - 4n - r_2 - \frac{r_2}{3}$$

ولأن $b_{n-1} - 4c_{n-1}$ لايقبل القسمة على ٣ إذن:

$$\frac{r_1}{3} - \frac{r_2}{3} \neq 0 \rightarrow r_1 \neq r_2 \rightarrow r_1 + r_2 = 3$$

وعليه:

$$\begin{aligned}\frac{7b_{n-1} + 8c_{n-1}}{3} &= 7\left(\frac{b_{n-1}}{3}\right) + 8\left(\frac{c_{n-1}}{3}\right)\\ &= 7k + 2r_1 + \frac{r_1}{3} + 8n + 2r_2 + \frac{2r_2}{3}\\ &= 7k + 2r_1 + \frac{r_1}{3} + \frac{r_2}{3} + 8n + 2r_2 + \frac{r_2}{3}\\ &= 7k + 2r_1 + 1 + 8n + 2r_2 + \frac{r_2}{3}\end{aligned}$$

إذن $(7b_{n-1} + 8c_{n-1})-$ لايقبل القسمة على ٣.

وبنفس الطريقة لـ$4b_{n-1} - 7c_{n-1}$.

ملحق.ب:-

لتكن دائرة الوحدة S مستثناة منها مجموعة نقاط B قابلة للعد منتهية أو غير منتهية.

ولتكن المجموعة A هي مجموعة المسافة(الزوايا θ)بين أي نقطتين في B .لتكن A' هي مجموعة بحيث لكل الأعداد الصحيحة n,k ماعدا $n=0$ كل عنصر في A' يساوي $\frac{2k\pi+\theta}{n}$ و θ هي أي عنصر في A.الآن لأي نقطة في B إذا أدرتها بأي زاوية α ووصلت لنقطة أخرى في B فالزاوية α هي في A'.

ولأن المجموعة A' معدودة ويمكن إختيار أي زاوية لتدوير المجموعة B من مجموعة الأعداد الحقيقية المتصلة،يمكن إيجاد زاوية ليست في A' فبتالي يمكن إيجاد زاوية β بحيث أي تدوير للمجموعة B بزاوية β n من المرات لن تصل لأي نقطة في B.